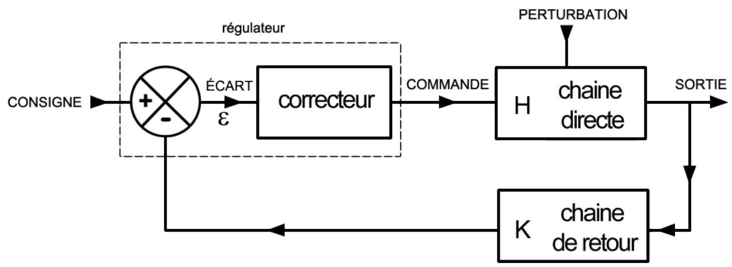
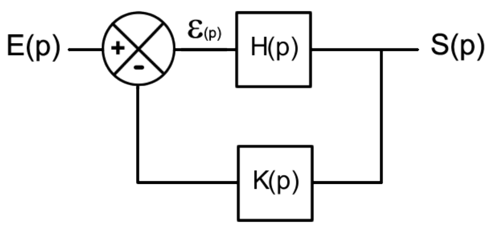
TRAVAUX DIRIGÉS AUTO - MÉMENTO

cours et solutions sur www.numlor.fr/elearning/auto

1 Structure générale



2 FTBF



$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1+K(p)H(p)}}$$

3 Théorême de la valeur finale $\boxed{\lim_{t\to+\infty} X(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)}$

4 Transformées de Laplace

signal	temporel	$\mathscr{L}$aplace
échelon	u(t)	$\frac{1}{p}$
rampe	t u(t)	$\frac{1}{p^2}$
exponentielle	$e^{-\frac{t}{\tau}}$ u(t)	$\frac{\tau}{1+\tau p}=\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$

fct. transfert	
intégrateur	$\frac{1}{p}$
dérivateur	p
passe bas	$\frac{1}{1+\tau p}$

5 Nombres complexes

$j^2 = -1$

$|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad$ $arg(a+jb) = arctg(\frac{b}{a})$ $(si\ a>0)$

$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\qquad$ $arg\frac{z_1}{z_2} = arg(z_1) - arg(z_2)$

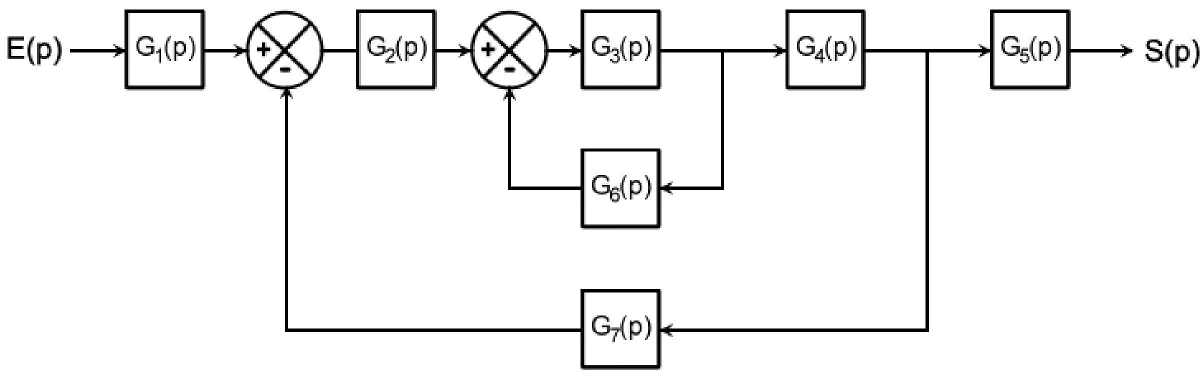
TD1

1 Boucles fermées

1.1

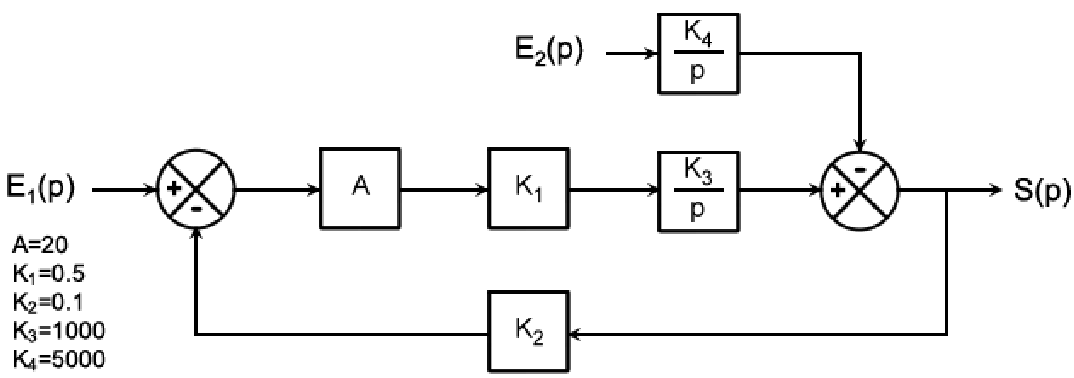
Simplifier le schéma fonctionnel ci-dessus en le mettant sous la forme de deux boucles à retours unitaires

1.2



À partir du schéma initial, déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

2 Entrées multiples



2.1

Déduire du schéma fonctionnel ci dessus l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p)$

2.2

En utilisant le théorème de superposition, déterminer S(p) en fonction de $E_1(p)$ et $E_2(p)$

2.3

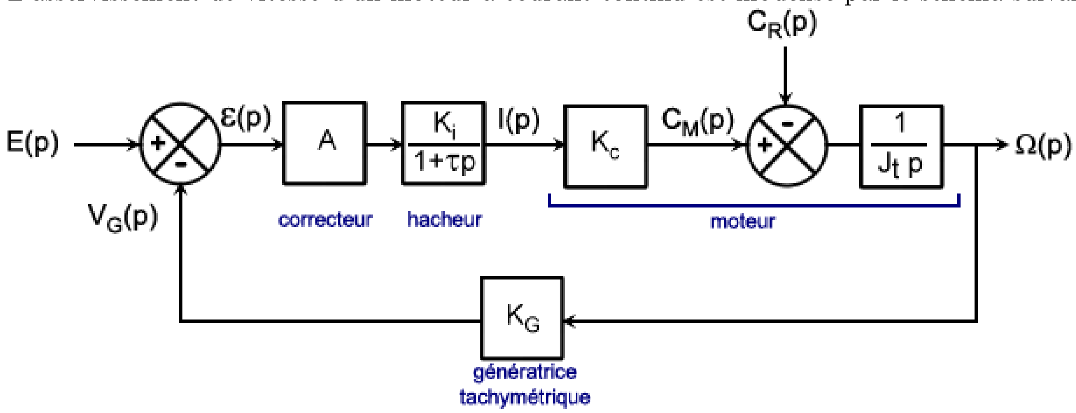
Écrire S(p) sous la forme $S(p) = \frac{\alpha_1}{1+\tau p}E_1(p) + \frac{\alpha_2}{1+\tau p}E_2(p)$ Calculer α_1, α_2 et τ

2.4

En l'absence de perturbation (E2(p)=0) et en utilisant le théorème de la valeur finale, déterminer S_∞ la valeur finale de S(t) lorsque l'entrée E1(t) est soumise à un échelon d'amplitude 10

TD2 Asservissement de vitesse

L'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu est modélisé par le schéma suivant :



1 Étude à vide - $C_R(p) = 0$

1.1

Quelle est la fonction réalisée par le bloc $\frac{1}{J_t p}$?

1.2

Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \frac{V_G(p)}{\varepsilon(p)}$
Exprimer cette fonction de transfert sous forme numérique avec :
A=1 K_i=1A/VK_c=2Nm/A J_t=0,01 kgm²K_g=0.0637 V/(rad/s) $\tau = 0.01s$

1.3

À vide, calculer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p) = \frac{\Omega(p)}{E(p)}$
Les numérateur et dénominateur seront ordonnés selon les puissances croissantes de p.

1.4

Montrer que $H_{bf}(p)$ peut se mettre sous la forme $H_{bf}(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$
Exprimer K, z et ω_0 en fonction de A, K_i, K_c,J_t, τ et K_G Calculez K, z et ω_0
Quelle est l'influence de A sur z et ω_0 ?

1.5

On applique un échelon d'amplitude 10V sur la consigne : Déterminer l'expression de $\Omega(p)$

1.6

En appliquant le théorème de la valeur finale, déterminer Ω_∞ la valeur finale de $\Omega(t)$

1.7

Calculer l'erreur ε_∞ en régime permanent

2 Étude en charge - $E(p) = 0$

2.1

En supposant E(p)=0, redessiner le schéma fonctionnel avec $C_R(p)$ pour consigne
Calculer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée $H'_{BF}(p) = \frac{\Omega(p)}{C_R(p)}$
Les numérateur et dénominateur seront ordonnés selon les puissances croissantes de p.

2.2

Montrer que $H'_{bf}(p)$ peut se mettre sous la forme $H'_{bf}(p) = \frac{K'(1+\tau p)}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$
Exprimer K' en fonction de A,K_i, K_c et K_G.

2.3

On applique un échelon de couple résistant C_R= 1Nm ; Déterminer l'expression de $\Omega(p)$

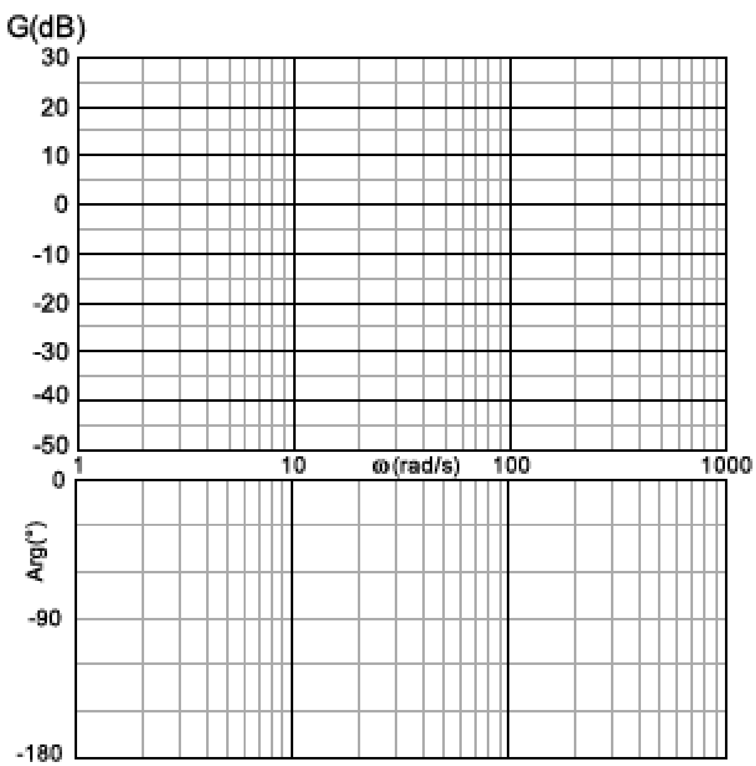
2.4

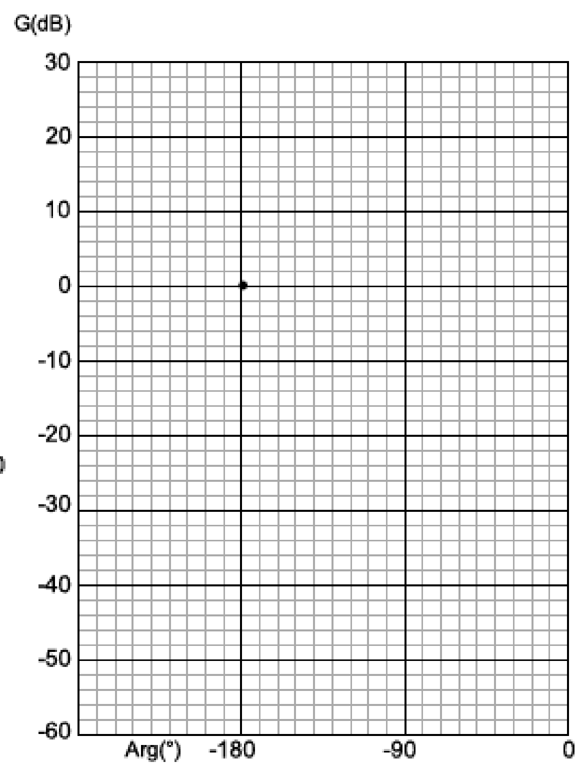
En utilisant le théorème de la valeur finale, déterminer$\Delta\Omega_\infty$ la valeur finale de la variation de $\Omega(t)$
Calculer cet écart pour A=1 puis A=10. Quelle est l'influence de A sur la précision ?

3 Diagrammes de Bode et Black

On considère la fonction de transfert $H(p) = \frac{12.7}{p(1+0.01p)}$
Calculer 20 log(|H|) et Arg(H) pour tracer les diagrammes de Bode et Black de H(p)

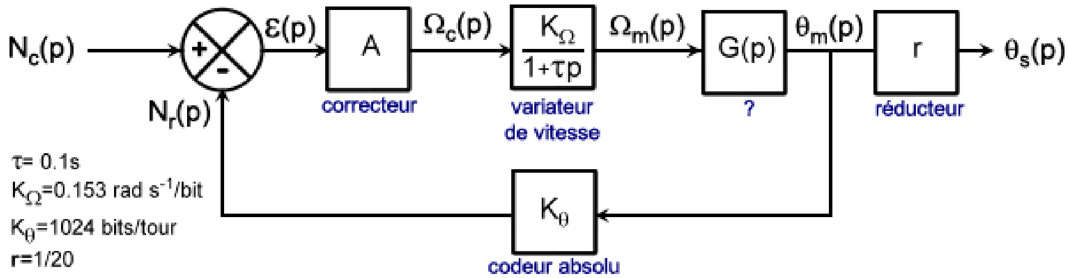
$\omega (rad/s)$	1	3	10	30	100	300	1000
Gain (dB)							
Arg (°)							





TD3 Asservissement de position

L'asservissement de position d'un axe de robot est modélisé par le schéma suivant :



Nc est la consigne de position sous forme numérique, issue d'un pupitre
Ω_c est la consigne de vitesse sur 10 bits transmise au variateur par un bus CAN

1

Donner les avantages et inconvénients de placer le codeur de position en entrée ou en sortie du réducteur

2

Quelle opération mathématique permet de transformer la vitesse de rotation en position angulaire ?
Déterminer alors l'expression de G(p)

3

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée$H_{bf}(p) = \frac{\theta_m(p)}{N_c(p)}$en fonction de A.
Le dénominateur de $H_{bf}(p)$ sera exprimé sous la forme d'un polynôme en p dont le terme constant sera égal à 1.

4

Montrer que $H_{bf}(p)$ peut se mettre sous la forme $H_{bf}(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$
Exprimer K, z et ω_0 en fonction de A, K_ω,K_θ,τ. Calculer K, z et ω_0 en fonction de A

5

Exprimer l'erreur $\varepsilon(p)$ en fonction de $N_c(p)$ (utiliser $H_{bf}(p)$)
Déterminer alors l'erreur en régime permanent ε_∞ pour un échelon de consigne d'amplitude 10 bits

6

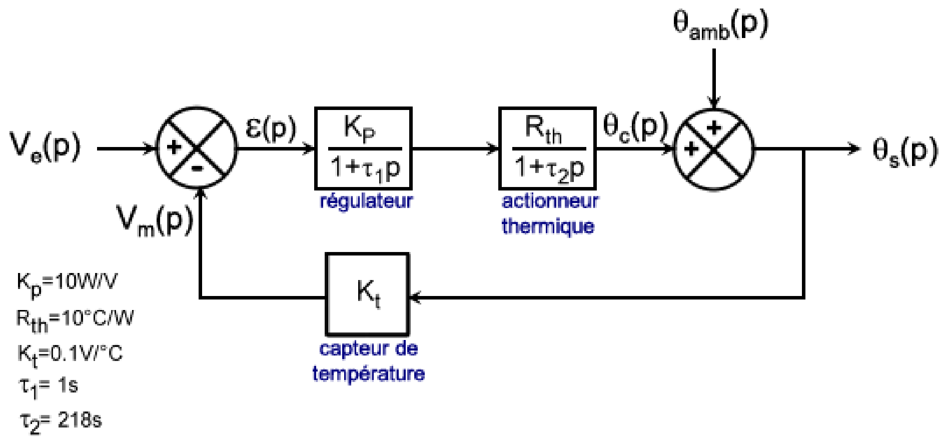
Sur un axe de robot, pour un échelon de consigne, un dépassement de la sortie pourrait occasionner des dégâts ;
Quelle valeur doit-on donner au coefficient d'amortissement z pour obtenir une réponse rapide sans dépassement ?
Quelle doit-être la valeur de A correspondante ?
Quel sera alors le temps de réponse à 90% pour un échelon de consigne ?

7

Pour A= 1, déterminer l'erreur de traînage en régime permanent ε_∞ pour une rampe de consigne d'amplitude 1024 t

TD4 Asservissement de température

Une régulation de température est modélisée par le schéma suivant :



1 Étude du comportement par rapport à la consigne $\theta_{amb} = 0$

1.1

Pour V_e=5V, que vaudrait la température de sortie si l'erreur était nulle ?

1.2

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p) = \frac{\theta_s(p)}{V_e(p)}$
Les numérateur et dénominateur seront ordonnés selon les puissances croissantes de p

1.3

Montrer que $H_{bf}(p)$ peut se mettre sous la forme $H_{bf}(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$
Exprimer K, z et ω_0 en fonction de K_p,R_{th}, K_t, τ_1 et τ_2. Calculez K, z et ω_0

1.4

On applique un échelon d'amplitude 5V sur la consigne : Déterminer l'expression de $\theta_S(p)$ sous forme littérale et numérique
Déterminer les pôles de $\theta_S(p)$, factorisez le dénominateur, puis décomposer $\theta_S(p)$ en éléments simples

1.5

En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminer $\theta_S(t)$
Quelle est θ_∞ la valeur finale de $\theta_S(t)$?
Tracez l'évolution de $\theta_S(t)$

2 Étude du comportement par rapport à la perturbation $V_e(p) = 0$

2.1

En supposant $V_e(p) = 0$, redessiner le schéma fonctionnel avec θ_{amb} pour consigne
Calculer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée $H'_{bf}(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_{amb}(p)}$
Le dénominateur sera ordonné selon les puissances croissantes de p.

2.2

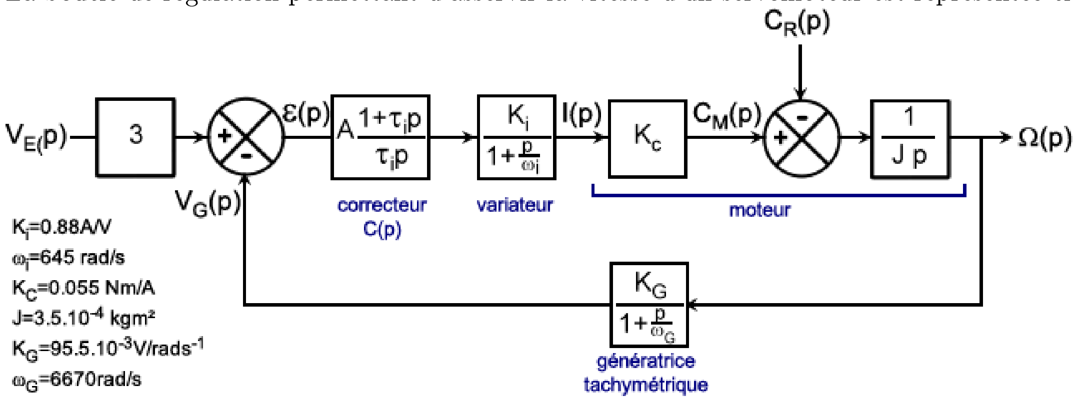
Montrer que $H'_{bf}(p)$ peut se mettre sous la forme $H'_{bf}(p) = \frac{K'(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$
Exprimer K' en fonction de K_p, R_{th}, K_t. Calculez K'

2.3

On applique un échelon d'amplitude +10°C sur la température ambiante : Déterminer l'expression de $\theta_S(p)$
Puis déterminer $\Delta\theta s_{\infty}$ la valeur finale de la variation de température $\theta_S(t)$

TD5 Asservissement de vitesse avec correcteur PI

La boucle de régulation permettant d'asservir la vitesse d'un servomoteur est représentée ci-dessous :



1 Correction proportionnelle

1.1

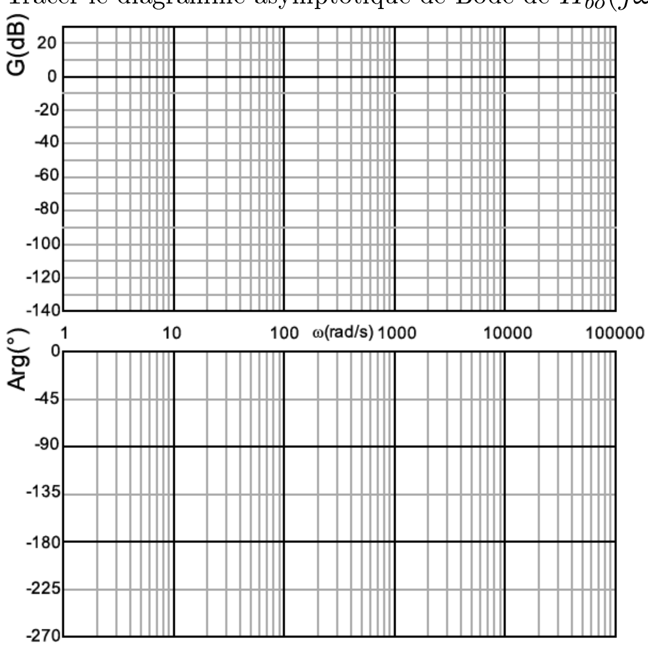
Pour un gain proportionnel C(p)= A, déterminer $H_{bo}(p) = \frac{V_G(p)}{\varepsilon(p)}$

1.2

Montrer que $H_{bo}(p)$ peut se mettre sous la forme : $H_{bo}(j\omega) = \frac{AK}{\frac{j\omega}{\omega_0}(1+\frac{j\omega}{\omega_0})(1+a\frac{j\omega}{\omega_0})}$ - Calculer K,ω_0 et a (0<a<1)

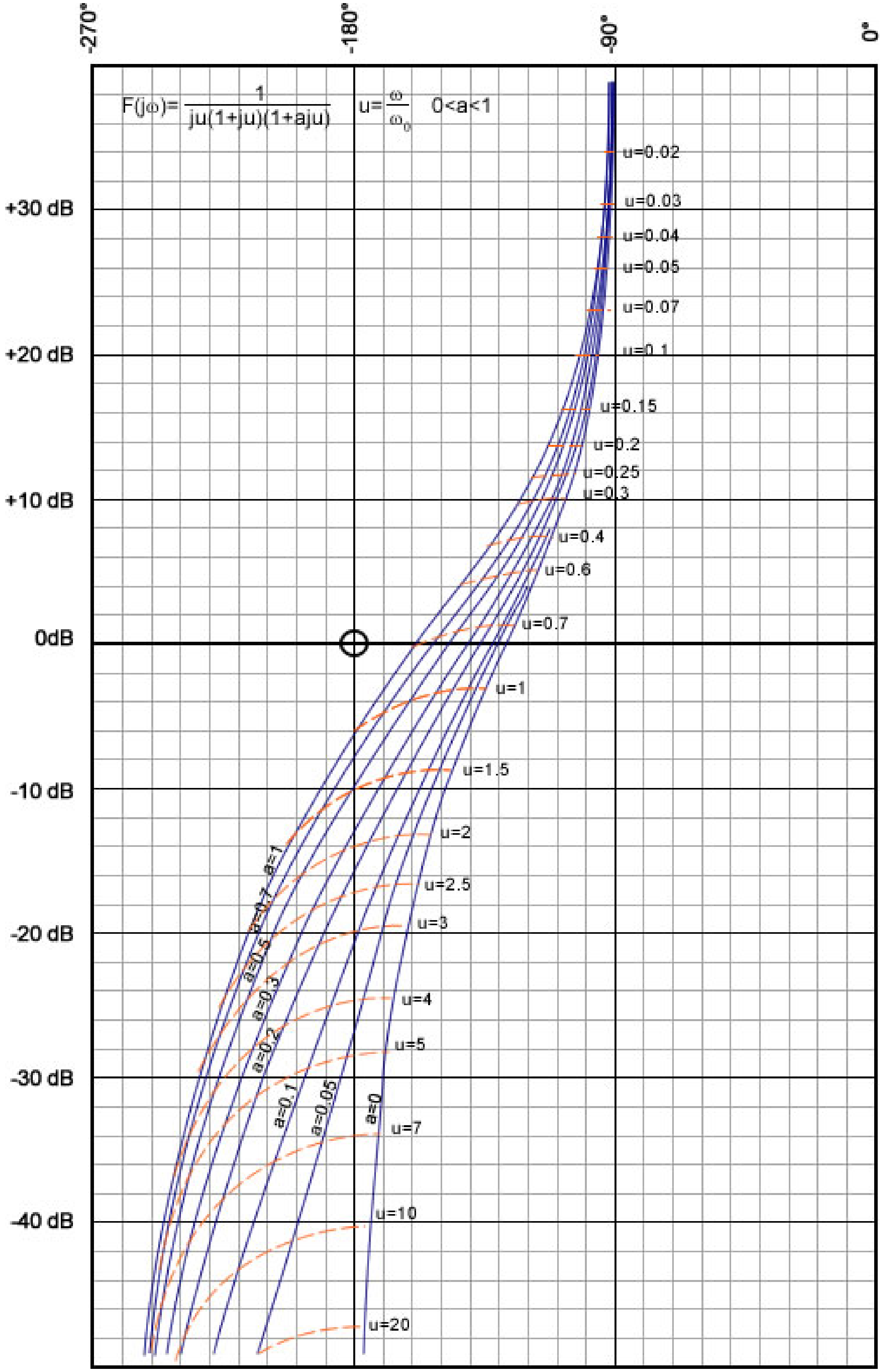
1.3

Tracer le diagramme asymptotique de Bode de $H_{bo}(j\omega)$ pour A=1



1.4

En utilisant l'abaque ci-dessous, tracer le lieu de Black de $H_{bo}(p)$et déterminer la valeur du gain A assurant une réponse stable en boucle fermée, avec une marge de phase supérieure ou égale à 75°.



Déterminez alors la valeur de la marge de gain g_m

1.5

À partir de la position de l'intégrale naturelle présente dans le système, déterminer si le système présentera une erreur pour une consigne de type échelon et en l'absence de couple résistant.
L'ajout d'un couple résistant introduira-t-elle une erreur supplémentaire ?

1.6

Calculer la vitesse à vide en régime établi lorsque la consigne reçoit un échelon de tension d'amplitude 10V.

1.7

Déterminer l'écart sur la sortie en régime permanent en présence d'un échelon de couple résistant égal à 0.12 N.m. Exprimer cet écart en % de la vitesse à vide. Est-il significatif ?

2 Correction proportionnelle-intégrale

2.1

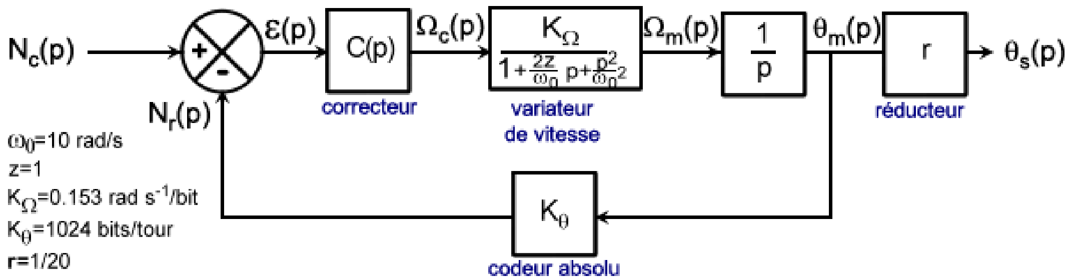
Pour le gain A calculé précédemment, déterminer la constante de temps τ_i d'un correcteur intégral adapté au système et permettant de conserver une marge de phase au moins égale à 70°.

2.2

Quelle est la conséquence de l'ajout de cette action intégrale sur l'erreur introduite par un échelon de couple résistant ?
Quelle serait l'erreur si l'on sollicitait le système avec pour consigne une rampe et en présence d'un échelon de couple résistant ?

TD6 Asservissement de position avec correcteur PI

Nous allons étudier la synthèse d'un correcteur PI pour l''asservissement de position d'un bras de robot en utilisant cette fois le diagramme de Bode



Nc est la consigne de position sous forme numérique, issue d'un pupitre
Ω_c est la consigne de vitesse sur 10 bits transmise au variateur par un bus CAN
C(p) est le correcteur Proportionnel et Intégrale $C(p) = A\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p}$

1 Correction proportionnelle C(p)=A

1.1

Montrer que $H_{bo}(p)$ peut se mettre sous la forme $H_{bo}(p) = \frac{K}{\frac{p}{\omega_0}(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2})}$

Exprimer K en fonction de A

1.2

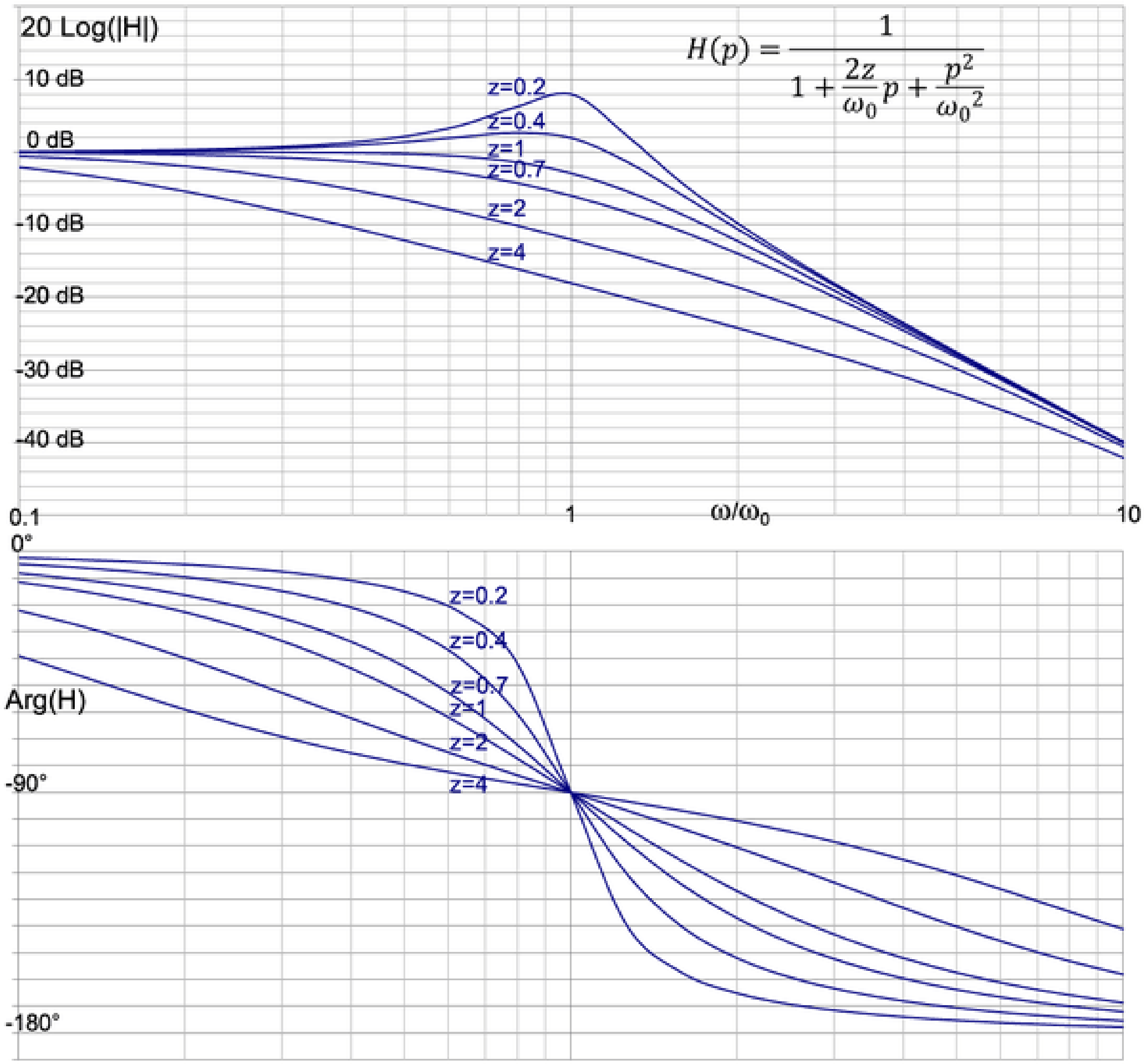
On cherche à obtenir une marge de phase $\phi_m = 70°$. L'argument de $H_{bo}(p)$ doit donc valoir -180°+70°=-110°
Quel doit-être l'argument de $\frac{K}{(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2})}$?
Sur le diagramme de bode de la page suivante, déterminer la valeur de $\frac{\omega_{0dB}}{\omega_0}$ respectant cette condition.

1.3

Calculer le gain de $H_{bo}(p)$ pour cette pulsation ω_{0dB} en fonction de A

1.4

Pour la pulsation ω_{0dB}, le gain doit être de 0 dB, déterminer la valeur de A assurant une marge de phase $\phi_m = 70°$



2 Correction proportionnelle et intégrale $C(p) = A\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p}$

2.1

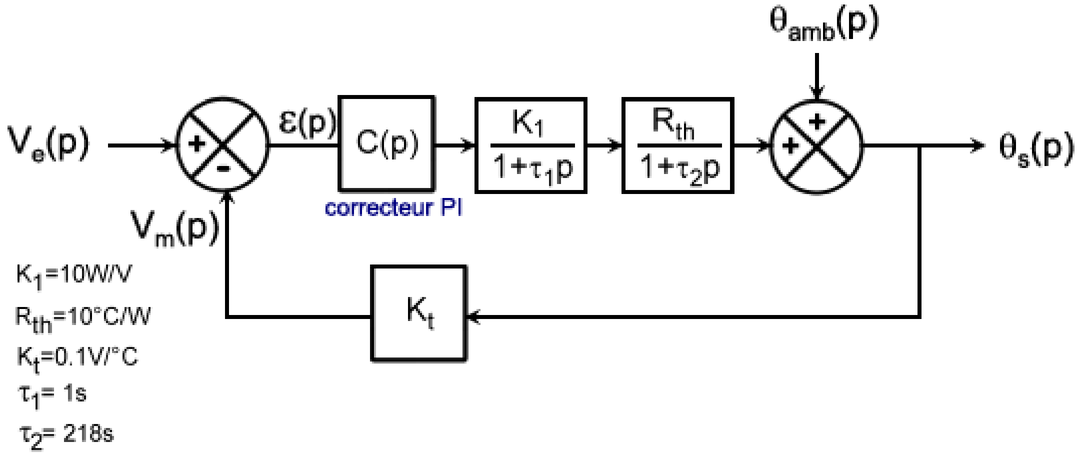
Pour le gain A calculé précédemment, déterminer la constante de temps τ_i d'un correcteur intégral adapté au système et permettant de conserver une marge de phase au moins égale à 65°.

2.2

Quelle sera l'erreur en régime établi pour un échelon de consigne ? Pour une rampe de consigne ? Comparer les résultats à ceux du TD n°3 et expliquer la cause des différences.

TD7 Régulation de température avec correcteur PI

Le but est d'améliorer les performances en précision et rapidité du TD4 grâce à un correcteur PI



- Pour une consigne de 50°C, la température de l'enceinte en régime établi était de 45,5°C
- Pour une élévation de 10°C de la température ambiante, la température augmentait de 0,9°C

1 Correction Proportionnelle C(p)=A

L'objectif est d'optimiser le fonctionnement en boucle fermée. Pour cela, nous allons déterminer la valeur de A permettant d'assurer une marge de phase $\varphi_m = 70°$

1.1

Pour un gain proportionnel C(p)= A, déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(j\omega) = \frac{V_m(p)}{\varepsilon(p)}$ sous forme littérale puis numérique

1.2

Pour une marge de phase $\varphi_m = 70°$, quel doit-être l'argument de $H_{bo}(j\omega)$?
Exprimer mathématiquement cette équation
En utilisant la formule mathématique $arctg(a) + arctg(b) = arctg(\frac{a+b}{1-ab})$, établir l'équation du second degré en ω traduisant notre condition
Déterminer alors la pulsation ω_{0dB} solution de cette équation ; on conservera la racine positive.

1.3

Calculer alors le module de $H_{bo}(j\omega_{0dB})$ en fonction de A
Ce module doit valoir 1, Quelle-est la valeur A du gain proportionnel assurant une marge de phase $\varphi_m = 70°$?

1.4

Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p)$ pour la valeur de A déterminée précédemment.
Calculer alors la température finale de sortie θ_f pour un échelon de consigne de 5 V

2 Correction Proportionnelle et Intégrale $C(p) = A\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p}$

L'objectif est de déterminer une constante de temps intégrale τ_i assurant une bonne précision sans trop dégrader la stabilité

2.1

Pour le gain A calculé précédemment, déterminer la constante de temps τ_i d'un correcteur intégral adapté au système et permettant de conserver une marge de phase au moins égale à 65°. Quelle sera la température de sortie en régime établi pour un échelon de consigne de 50°C ?

3 Correction Proportionnelle Intégrale et Dérivée $C(p) = A(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p)$

L'action dérivée peut améliorer la rapidité et la stabilité, Elle est néanmoins sensible aux parasites et son utilisation dégrade la robustesse du système
On ne fera pas de détermination théorique de la constante de temps τ_d ,
J'ai utilisé la méthode purement empirique qui consiste à augmenter τ_d à partir de 0 jusqu'à obtenir un bon compromis
Les réponses des 3 types de correcteur sont illustrées sur la figure suivante
- Sans correcteur la réponse est très lente et l'erreur en régime établi est importante
- Avec notre correcteur P, la réponse est rapide, il y a une légère erreur en régime établi
- Avec notre correcteur PI, la réponse est ralentie par le dépassement, l'erreur est nulle en régime établi
- Avec un correcteur PID, le dépassement est limité, l'erreur est toujours nulle... Mais le système est moins robuste (sensible aux variations de paramètres)